ÇÖZÜMLER-I

1. $\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ca}+\dfrac{a-b}{1+ab}$
$=\dfrac{(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+(a-b)(1+bc)(1+ca)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$
olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
& (b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+(a-b)(1+bc)(1+ca)\\
= \; & ab^2-c^2a+bc^2-a^2b+ca^2-b^2c\\
= \; & ab^2-c^2a+bc^2-a^2b+ca^2-b^2c+abc-abc\\
= \; & (abc-b^2c-a^2b+ab^2)+(-abc-c^2a+bc^2+ca^2)\\
= \; & (b(ac-bc-a^2+ab))+(-c(ab+ac-bc-a^2))\\
= \; & (b-c)(c(a-b)-a(a-b))\\
= \; & (b-c)(c-a)(a-b)
\end{aligned}$$

olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

2. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ olsun. Bu durumda $f'(x)=\dfrac{6x^2-24}{(x^2+3x+4)^2}$ olacaktır. O halde $f'(x)=0$ olmasını sağlayan $x=2$ ve $x=-2$ değerleri fonksiyonun kritik noktalarıdır. (Paydadaki $p(x)=x^2+3x+4$ polinomunun diskriminantı negatif olduğundan $p(x)$'in reel kökü yoktur, yani türevi tanımsız yapan bir $x\in\mathbb{R}$ yoktur.) Türev tablosu ve işaret incelemesi yapıldığında f nin $x=2$ de mutlak minimum ve $x=-2$ de mutlak maksimum değerini aldığını görürüz. Bu halde;

$$f(2)=\frac{1}{7}\leq\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}\leq 7=f(-2)$$

elde edilir.

3. Verilen ifadede içler dışlar çarpımı yapıldığında

$$bcz-abz-c^2y+acy=bcx-abz-c^2x+acz$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ve ifade düzenlendiğinde

$$bc(z-x)+c^2(x-y)+ac(y-z)=0$$

bulunur. $c\neq 0$ olduğundan ifadeyi c ye bölerek aradığımız sonucu bulmuş oluruz.

4. $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki ikinci derece denklemlerin kökler toplamı

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ve kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ idi. O halde

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + a = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + a = (-m)^2 - (m^2 + a) + a = 0$$

elde edilir.

5. $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = \dfrac{9}{16}a^4$ denkleminden
$(x^2 + 5ax + 4a^2)(x^2 + 5ax + 6a^2) = \frac{9}{16}a^4$ elde edilir. $(x^2 + 5ax + 4a^2) = u$ dersek denklemimiz $u^2 + 2a^2u - \dfrac{9}{16}a^4 = 0$ şekline dönüşür. İkinci derece bu denklemin kökleri $u_1 = -\dfrac{9a^2}{4}$ ve $u_2 = \dfrac{a^2}{4}$ dir.
$x^2 + 5ax + 4a^2 = -\dfrac{9a^2}{4} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{5}{2}a.$
$x^2 + 5ax + 4a^2 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{10}\right)a,\ x_4 = \dfrac{1}{2}\left(-5 - \sqrt{10}\right)a.$